



教育图书



功能学具



学生之家

基础教育行业专研品牌

30⁺年专注教育行业

全品学练考

主编 肖德好

导学案

高中数学5

选择性必修第一册 RJA

北京
专版

数智教辅

索取二维码
贴此处
激活享受服务

— 全品AI学伴 —
7×24小时有问必答
高效预复习，吃透每一课

天津出版传媒集团
天津人民出版社

CONTENTS

目录

导学案

01

第一章 空间向量与立体几何

PART ONE

1.1 空间向量及其运算

1.1.1 空间向量及其线性运算

1.1.2 空间向量的数量积运算

1.2 空间向量基本定理

1.3 空间向量及其运算的坐标表示

1.3.1 空间直角坐标系

1.3.2 空间向量运算的坐标表示

1.4 空间向量的应用

1.4.1 用空间向量研究直线、平面的位置关系

第1课时 空间中点、直线和平面的向量表示

第2课时 空间中直线、平面的平行

第3课时 空间中直线、平面的垂直

1.4.2 用空间向量研究距离、夹角问题

第1课时 用空间向量研究距离问题

第2课时 用空间向量研究夹角问题（一）——线线角、线面角

第3课时 用空间向量研究夹角问题（二）——面面角

本章总结提升

129

129

133

137

140

140

140

145

145

147

150

152

152

155

157

160

02

第二章 直线和圆的方程

PART TWO

2.1 直线的倾斜角与斜率

2.1.1 倾斜角与斜率

2.1.2 两条直线平行和垂直的判定

2.2 直线的方程

2.2.1 直线的点斜式方程

2.2.2 直线的两点式方程

2.2.3 直线的一般式方程

164

164

166

169

171

173

2.3 直线的交点坐标与距离公式 176

2.3.1 两条直线的交点坐标 176

2.3.2 两点间的距离公式 176

2.3.3 点到直线的距离公式 179

2.3.4 两条平行直线间的距离 179

2.4 圆的方程 181

2.4.1 圆的标准方程 181

2.4.2 圆的一般方程 184

2.5 直线与圆、圆与圆的位置关系 186

2.5.1 直线与圆的位置关系 186

2.5.2 圆与圆的位置关系 189

④ 本章总结提升 192

03

第三章 圆锥曲线的方程

PART THREE.....

3.1 椭圆 195

3.1.1 椭圆及其标准方程 195

第1课时 椭圆及其标准方程 195

第2课时 轨迹问题 198

3.1.2 椭圆的简单几何性质 200

第1课时 椭圆的简单几何性质 200

第2课时 直线与椭圆的位置关系 202

3.2 双曲线 206

3.2.1 双曲线及其标准方程 206

3.2.2 双曲线的简单几何性质 210

第1课时 双曲线的简单几何性质 210

第2课时 直线与双曲线的位置关系及应用 213

拓展微课 圆锥曲线的离心率 216

3.3 抛物线 217

3.3.1 抛物线及其标准方程 217

3.3.2 抛物线的简单几何性质 220

第1课时 抛物线的简单几何性质 220

第2课时 直线与抛物线的位置关系 223

④ 本章总结提升 225

◆ 参考答案（单独成册） 231



第一章 空间向量与立体几何



讲课智能体

1.1 空间向量及其运算

1.1.1 空间向量及其线性运算

【学习目标】

1. 经历由平面向量推广到空间向量的过程,理解空间向量的概念.
2. 经历由平面向量的运算及其法则推广到空间向量的过程.
3. 掌握空间向量的线性运算.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 空间向量及有关概念

1. 概念与表示

(1)空间向量:在空间,我们把具有_____和_____的量叫作空间向量.空间向量用字母 a , $b, c, \dots$ 表示,也用有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 表示.

(2)空间向量的模:空间向量的大小叫作空间向量的_____或_____.有向线段的_____表示空间向量的模.

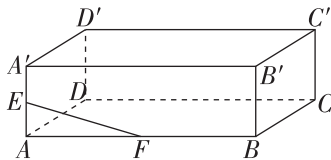
2. 几类特殊的空间向量

名称	定义及表示
零向量	长度为 0 的向量叫作_____,记为 $\mathbf{0}$
单位向量	_____的向量叫作单位向量
相反向量	与向量 a 长度_____而方向_____的向量,叫作 a 的相反向量,记为_____
共线向量	如果表示若干空间向量的有向线段所在的直线_____,那么这些向量叫作共线向量或平行向量. 规定:零向量与任意向量_____,即对于任意向量 a ,都有 $\mathbf{0}$ _____ a
相等向量	方向_____且模_____的向量叫作相等向量.在空间,_____且_____的有向线段表示同一向量或相等向量

【诊断分析】

1. 你能说出平面向量与空间向量的区别与联系吗?

2. 如图,在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, E, F 分别为棱 AA', AB 的中点.



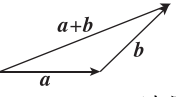
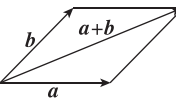
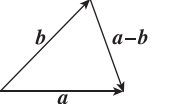
- (1)写出与向量 $\overrightarrow{BC}$ 相等的向量;
- (2)写出向量 $\overrightarrow{BC}$ 的相反向量;
- (3)写出与向量 $\overrightarrow{EF}$ 平行的向量.

◆ 知识点二 空间向量的线性运算

1. 空间向量的自由性

任意两个空间向量都可以通过平移转化为同一平面内的向量,这样任意两个_____的运算就可以转化为_____的运算.

2. 空间向量的线性运算

运算	定义	法则 (或几何意义)	运算律
加法	求两个向量的 _____的 运算	 _____法则  _____法则	(1) 加法交 换律: $a + b =$ _____; (2) 加法结 合律: $(a + b) + c =$ _____
减法	减去一个向量相当于加上这个向量的 _____	 _____法则	$a - b =$ _____
数乘	实数 λ 与向量 a 的积是一个_____, 这种运算叫作向量的_____, 记作_____	(1) $ \lambda a =$ _____. (2) 当 $\lambda > 0$ 时, λa 与 a 的方向_____; 当 $\lambda < 0$ 时, λa 与 a 的方向_____; 当 $\lambda = 0$ 时, $\lambda a =$ _____	(1) 对向量加法的分配律: $\lambda(a + b) =$ _____; (2) 对实数加法的分配律: $(\lambda + \mu)a =$ _____

【诊断分析】

- 已知空间任意四个点 A, B, C, D , 则 $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CB} =$ _____.
- 空间向量的加、减法运算与平面向量的加、减法运算是否相同? 平面向量加、减法的运算律在空间向量中还适用吗?

◆ 知识点三 空间向量共线与共面的充要条件

1. 空间两向量共线的充要条件

对任意两个空间向量 $a, b (b \neq 0)$, $a \parallel b$ 的充要条件是存在实数 λ , 使_____.

2. 空间直线的确定

(1) 直线的方向向量

在直线 l 上取_____, 把与向量 a _____的非零向量称为直线 l 的方向向量.

(2) 空间直线的确定

空间直线可以由其上一点和它的_____确定.

3. 共面向量的定义

(1) 向量与直线平行

如果表示向量 a 的有向线段 $\overrightarrow{OA}$ 所在的直线 OA 与直线 l _____或_____, 那么称向量 a 平行于直线 l .

(2) 向量与平面平行

如果表示向量 a 的有向线段 $\overrightarrow{OA}$ 所在的直线 OA _____或_____, 那么称向量 a 平行于平面 α .

(3) 共面向量

平行于同一个平面的向量, 叫作_____.

4. 共面向量定理

如果两个向量 a, b 不共线, 那么向量 p 与向量 a, b 共面的充要条件是存在唯一的有序实数对 (x, y) , 使_____.

【诊断分析】

下列说法正确的是_____. (填序号)

- 若 $p = xa + yb$, 则 p 与 a, b 共面;
- 若 p 与 a, b 共面, 则 $p = xa + yb$;
- 若 $\overrightarrow{MP} = x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB}$, 则 P, M, A, B 共面;
- 若 P, M, A, B 共面, 则 $\overrightarrow{MP} = x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB}$.

课中探究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 空间向量的有关概念及应用

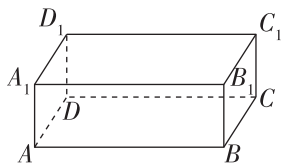
例 1 [2024 · 北京首师大附中测试] 给出下列命题:

- 将空间中所有的单位向量平移, 使它们以同一个点为起点, 则它们的终点构成一个圆;
- 若空间向量 a, b 满足 $|a| = |b|$, 则 $a = b$;
- 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 必有 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$;
- 若空间向量 a, b, c 满足 $a = b, b = c$, 则 $a = c$.

其中假命题的个数是 ()

- 1
- 2
- 3
- 4

变式 如图所示,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=3, AD=2, AA_1=1$, 则下列关于以八个顶点中的两个为起点和终点的向量的说法中错误的是 ()



- A. 单位向量有 8 个
B. 与 $\overrightarrow{AB}$ 相等的向量有 3 个
C. $\overrightarrow{AA_1}$ 的相反向量有 4 个
D. 模为 $\sqrt{5}$ 的向量有 4 个

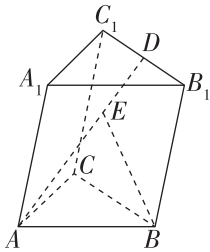
[素养小结]

解答空间向量有关概念问题的关键点及注意点:

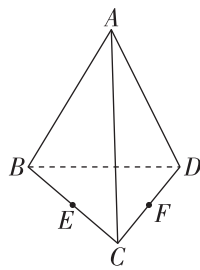
- (1) 关键点: 紧紧抓住向量的两个要素, 即大小和方向.
(2) 注意点: ①零向量不是没有方向, 它的方向是任意的. ②单位向量的方向虽然不一定相同, 但它们的长度都是 1. ③两个向量的模相等, 不一定是相等向量; 反之, 若两个向量相等, 则它们不仅模相等, 而且方向相同. 若两个向量的模相等, 方向相反, 则它们为相反向量.

◆ 探究点二 空间向量的线性运算

例 2 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, D 是棱 B_1C_1 的中点, $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{ED}$. 设 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}, \overrightarrow{AC} = \mathbf{b}, \overrightarrow{AA_1} = \mathbf{c}$, 试用向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 表示向量 $\overrightarrow{AD}$ 和 $\overrightarrow{BE}$.

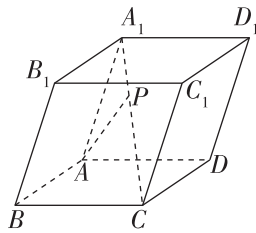


变式 (1) 如图, 在四面体 $ABCD$ 中, E, F 分别是 BC, CD 的中点, 则 $\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}) =$ ()



- A. $\overrightarrow{AD}$ B. $\overrightarrow{FA}$
C. $\overrightarrow{AF}$ D. $\overrightarrow{EF}$

(2) [2025 · 延庆期中] 如图, 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $\overrightarrow{AA_1} = \mathbf{a}, \overrightarrow{AB} = \mathbf{b}, \overrightarrow{AD} = \mathbf{c}$, 点 P 在 A_1C 上, 且 $A_1P : PC = 1 : 2$, 则 $\overrightarrow{AP} =$ ()



- A. $\frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b} + \frac{1}{3}\mathbf{c}$ B. $\frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b} + \frac{2}{3}\mathbf{c}$
C. $-\frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b} + \frac{2}{3}\mathbf{c}$ D. $\frac{1}{3}\mathbf{a} - \frac{2}{3}\mathbf{b} - \frac{2}{3}\mathbf{c}$

[素养小结]

利用三角形法则和平行四边形法则进行空间向量的加法运算时, 务必要注意和向量的方向, 必要时可对空间向量自由平移进而获得更准确的结果.

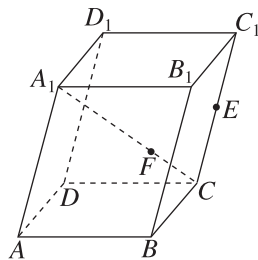
◆ 探究点三 空间向量的共线、共面问题

角度一 空间向量的共线问题

例 3 (1) [2025 · 北京八一学校测试] 已知 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 不共面, $\mathbf{e} = 3\mathbf{a} - t\mathbf{b} - \mathbf{c}, \mathbf{d} = -2t\mathbf{a} + 6\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$, 若 $\mathbf{e}$ 与 $\mathbf{d}$ 共线, 则实数 t 的值为 ()

- A. -3 B. 1
C. 3 D. -3 或 3

(2) 如图, 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $\overrightarrow{C_1C} = 2\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{A_1C} = 3\overrightarrow{FC}$. 求证: A, F, E 三点共线.



变式 (1) 已知空间向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 不共线, 且 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}, \overrightarrow{BC} = -5\mathbf{a} + 6\mathbf{b}, \overrightarrow{CD} = 7\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, 则一定共线的三个点是 ()

- A. A, B, D B. A, B, C
C. B, C, D D. A, C, D

(2) 在四面体 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} + \lambda\overrightarrow{DB}$, 则 $\lambda =$ _____.

[素养小结]

(1) 向量共线的判定及应用: 证明空间向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 共线的关键是利用已知条件找到实数 λ , 使 $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$ ($\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$) 成立.

(2) 对于空间三点 P, A, B , 可通过证明下列结论来证明 P, A, B 三点共线.

- ① 存在实数 λ , 使 $\overrightarrow{PA} = \lambda\overrightarrow{PB}$ 成立.
② 对空间中一点 O , 有 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ ($x + y = 1$).

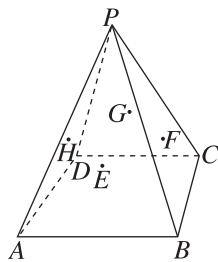
角度二 空间向量的共面问题

例 4 已知 A, B, C 三点不共线, 对平面 ABC 外的任一点 O , 若点 M 满足 $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

(1) 判断 $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ 三个向量是否共面;

(2) 判断点 M 是否在平面 ABC 内.

变式 如图, 已知 P 是四边形 $ABCD$ 所在平面外一点, 连接 PA, PB, PC, PD , 点 E, F, G, H 分别为 $\triangle PAB, \triangle PBC, \triangle PCD, \triangle PDA$ 的重心, 求证: E, F, G, H 四点共面.



[素养小结]

(1) 证明空间三向量共面的方法: 证明其中一个向量可以表示成另两个向量的线性组合, 即若 $\mathbf{p} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$ ($x, y \in \mathbf{R}$), 则向量 $\mathbf{p}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ 共面.

(2) 证明空间四点共面的思路: 对于空间四点 P, M, A, B , 可通过证明下列结论来证明 P, M, A, B 四点共面.

- ① 存在实数 x, y , 使 $\overrightarrow{MP} = x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB}$ 成立;
② 对空间中一点 O , 有 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB}$ ($x, y \in \mathbf{R}$);
③ 对空间中一点 O , 有 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OM}$ ($x + y + z = 1$).

课堂评价

知识评价 素养形成

1. [2025 · 大兴期末] 化简 $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC} =$ ()

- A. $\overrightarrow{AB}$ B. $\overrightarrow{CB}$ C. $\overrightarrow{OC}$ D. $\overrightarrow{BC}$

2. [2026 · 北京理工附中测试] 下列说法中正确的是 ()

- A. 已知 A, B, C, D, E 是空间中任意五点, 则 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} = \mathbf{0}$
B. 若向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ 满足 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, 则 $AB \parallel CD$
C. 若分别表示两个空间向量的有向线段所在的直线是异面直线, 则这两个向量不是共面向量
D. 若 $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC} + \mu\overrightarrow{AD}$ ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$), 则 A, B, C, D 四点共面

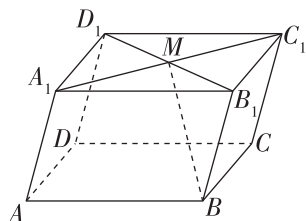
3. [2026·北京清华附中测试] 如图,在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M 为 A_1C_1 与 B_1D_1 的交点,若 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$,则下列向量中与 $\overrightarrow{BM}$ 相等的是 ()

A. $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

B. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

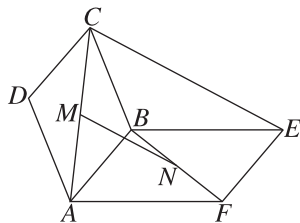
C. $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

D. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$



4. 若非零空间向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不共线,则使 $2k\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{e}_1+2(k+1)\boldsymbol{e}_2$ 共线的 k 的值为_____.

5. 如图所示,四边形 $ABCD$ 与四边形 $ABEF$ 都是平行四边形且不共面, M, N 分别是 AC, BF 的中点,判断 $\overrightarrow{CE}$ 与 $\overrightarrow{MN}$ 是否共线.



1.1.2 空间向量的数量积运算

【学习目标】

1. 结合立体几何与空间向量的特征,了解空间向量投影的概念.
2. 类比平面向量,掌握空间向量的数量积.
3. 类比平面向量并借助空间图形,知道空间向量的有关运算律,能运用数量积解决空间中的垂直、夹角及距离问题.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

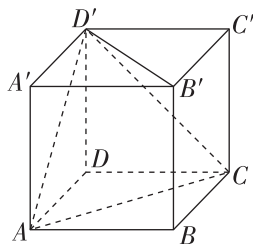
◆ 知识点一 空间向量的夹角

定义	已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, 在空间任取一点 O , 作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 则 $\angle AOB$ 叫作向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的 _____, 记作 _____
取值范围	_____
向量垂直	如果 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle =$ _____, 那么向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 互相垂直, 记作 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$

【诊断分析】

1. 若 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 是空间的两个非零向量, 则 $\langle -\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, -\boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$, 此说法对吗?

2. 如图,在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中,分别求向量 $\overrightarrow{AC}$ 与向量 $\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{CD'}, \overrightarrow{B'D'}$ 的夹角.



◆ 知识点二 数量积的相关概念及性质

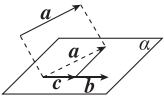
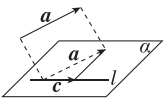
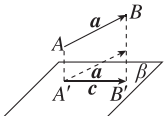
1. 概念: 已知两个非零向量 a, b , 则 _____ 叫作 a, b 的数量积, 记作 $a \cdot b$, 即 $a \cdot b =$ _____.

特别地, 零向量与任意向量的数量积为 0.

2. 空间向量数量积的性质与运算律

性质	运算律
$a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b =$ _____	$(\lambda a) \cdot b =$ _____, $\lambda \in \mathbf{R}$
$a^2 = a \cdot a = a \cdot a \cdot \cos \langle a, a \rangle =$ _____	$a \cdot b =$ _____ (交换律)
$\cos \langle a, b \rangle =$ _____	$(a + b) \cdot c =$ _____ (分配律)

3. 投影向量的概念

	作法	图形表示	符号表示
向量 a 在向量 b 上的投影向量	将向量 a, b (直线 l) 平移到同一个平面 α 内, 利用平面上向量的投影, 得到与向量 b (直线 l 的方向向量) 共线的向量 c		$c =$ _____
向量 a 在直线 l 上的投影向量			_____
向量 a 在平面 β 上的投影向量	分别由向量 a 的起点 A 和终点 B 作平面 β 的垂线, 垂足分别为 A', B' , 得到向量 $\overrightarrow{A'B'}$		$\overrightarrow{A'B'}$

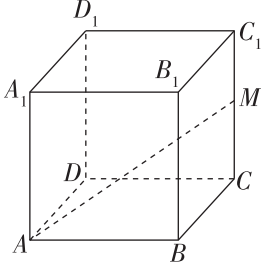
注: 向量 $a, \overrightarrow{A'B'}$ 的夹角就是向量 a 所在直线与平面 β 所成的角.

【诊断分析】

1. 如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, M 为棱 CC_1 上任意一点.

(1) 试确定向量 $\overrightarrow{AM}$ 在直线 BC 上的投影向量, 并求 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$;

(2) 求 $\overrightarrow{AM}$ 在平面 $ABCD$ 上的投影向量.



2. 已知空间向量 a, b 满足 $|a| = 1$, 且 $a \cdot b = 2$, 若 a 与 b 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 则 $|b| =$ _____.

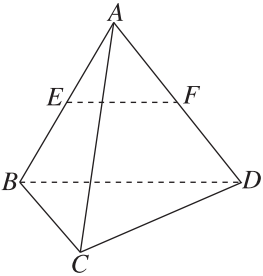
课中探究

考点探究 素养小结

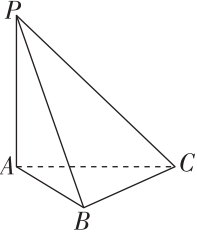
◆ 探究点一 空间向量的数量积运算

例 1 如图所示, 在棱长为 1 的正四面体 $ABCD$ 中, E, F 分别是 AB, AD 的中点, 求:

(1) $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BA}$; (2) $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BD}$; (3) $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{DC}$; (4) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.



变式 [2026 · 北京北师大附属实验学校测试] 如图, 在三棱锥 $P - ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC , $CB \perp AB$, $AB = BC = a$, $PA = b$, 则 $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{AB} =$ _____.



[素养小结]

(1)空间向量数量积运算的两种方法:

①已知 a, b 的模及 a 与 b 的夹角,直接代入数量积公式计算.

②如果要求的是关于 a 与 b 的多项式形式的数量积,可以先利用数量积的运算律将多项式展开,再利用 $a \cdot a = |a|^2$ 及数量积公式进行计算.

(2)在几何体中求空间向量数量积的步骤:

①将各向量分解成已知模和夹角的向量的组合形式;

②利用向量的运算律将数量积展开,转化为已知模和夹角的向量的数量积;

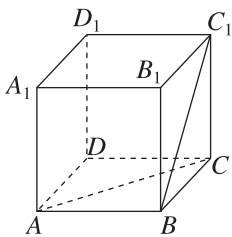
③代入 $a \cdot b = |a||b|\cos\langle a, b \rangle$ 求解.

◆ 探究点二 利用向量的数量积解决夹角问题

例 2 如图所示,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中.

(1)求 $\overrightarrow{BC_1}$ 与 $\overrightarrow{CA}$ 的夹角;

(2)求异面直线 BC_1 与 CA 所成角的大小.



变式 [2026·北京四中测试] 在三棱锥 $O-ABC$ 中, OA, OB, OC 两两垂直, $OA=OB=OC$, 则 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ 和 $\overrightarrow{CA}$ 的夹角为 ()

- A. 30° B. 45°
C. 60° D. 90°

[素养小结]

(1)求两个空间向量的夹角的两种方法:

①结合图形,平移向量,利用空间向量的夹角定义来求,但要注意向量夹角的范围.

②先求 $a \cdot b$, 再利用公式 $\cos\langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$ 求 $\cos\langle a, b \rangle$, 最后确定 $\langle a, b \rangle$.

(2)用向量法求两直线的夹角:

①取向量:在两直线上分别取方向向量 a, b ;

②运算:求 $\cos\langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$;

③结论:设两直线的夹角为 θ , 则 $\cos\theta = |\cos\langle a, b \rangle|$, 进而得到 θ .

◆ 探究点三 利用向量的数量积解决长度问题

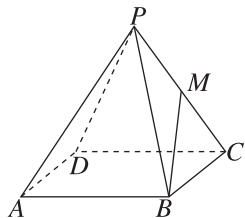
例 3 [2026·北京第一六六中学测试] 已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是矩形, $AB=2$, $AD=4$, $AA_1=3$, 且 $\angle A_1AD = \angle A_1AB = 60^\circ$, 则线段 AC_1 的长为 ()

- A. 9 B. $\sqrt{29}$
C. $\sqrt{47}$ D. $4\sqrt{3}$

变式 如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形,侧棱 PA 的长为 2, 且 PA 与 AB, AD 的夹角都是 60° , 若 M 是 PC 的中点, 则

$|\overrightarrow{BM}| =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ B. $\frac{3}{2}$
C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$



[素养小结]

求两点间的距离或线段的长度的步骤:

(1)将两点间的连线(或此线段)用向量表示;

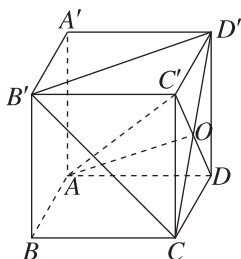
(2)用其他已知夹角和模的向量表示该向量;

(3)利用 $|a| = \sqrt{a \cdot a}$, 计算出 $|a|$, 即得所求距离或长度.

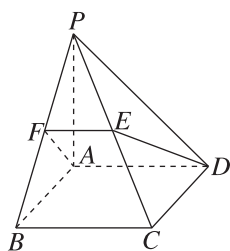
◆ 探究点四 利用空间向量的数量积判断或证明垂直问题

例 4 如图,在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, CD' 与 DC' 相交于点 O , 求证:

- (1) $AO \perp CD'$;
(2) $AC' \perp$ 平面 $B'CD'$.



变式 如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 四边形 $ABCD$ 为正方形, $AP = AB$, F, E 分别是 PB, PC 的中点. 证明: 平面 $PBC \perp$ 平面 $ADEF$.



拓展 写出命题“如果平面内的一条直线和这个平面的一条斜线在这个平面上的射影垂直, 那么它也和这条斜线垂直”的逆命题, 判断逆命题的真假, 并用向量法证明.

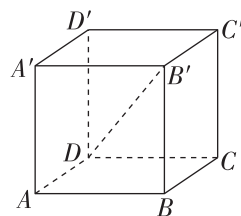
课堂评价

知识评价 素养形成

1. [2024 · 房山期中] 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} =$ ()

- A. $2\sqrt{2}$ B. $4\sqrt{2}$ C. 2 D. 4

2. [2025 · 北京首师大附中测试] 如图, 已知正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱长为 1, 则 $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{DB'} =$ ()

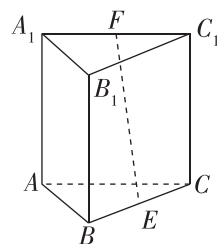


- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. -1

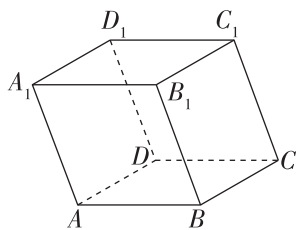
3. [2025 · 北京第十二中学测试] 已知空间向量 a, b, c 满足 $a + b + c = 0$, 且 $|a| = 2, |b| = 3, |c| = 4$, 则 $\cos \langle a, b \rangle =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

4. 如图, 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的棱长均为 2, E, F 分别是 BC, A_1C_1 的中点, 则 EF 的长为 _____.



5. [2026·北京理工附中测试] 如图,若平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的所有棱长均为 2,且 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC_1} = -2$, 则 $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CC_1} \rangle =$ _____, 异面直线 AB 与 CC_1 所成角的大小为 _____.



1.2 空间向量基本定理

【学习目标】

1. 在平面向量基本定理的基础上,能借助投影进行向量分解,掌握空间向量基本定理.
2. 知道基底、单位正交基底,并能在选定基底下进行向量的表示及运算.

课前预习

知识导学 素养初识

◆ 知识点 空间向量基本定理

1. 分向量

如果 i, j, k 是空间三个 _____ 的向量,那么对任意一个空间向量 p , 存在唯一的有序实数组 (x, y, z) , 使得 $p = xi + yj + zk$. 称 _____ 分别为向量 p 在 i, j, k 上的分向量.

2. 空间向量基本定理

如果三个向量 a, b, c _____, 那么对任意一个空间向量 p , 存在 _____ 的有序实数组 (x, y, z) , 使得 _____.

我们把 $\{a, b, c\}$ 叫作空间的一个 _____, a, b, c 都叫作 _____. 空间任意三个 _____ 的向量都可以构成空间的一个基底.

3. 单位正交基底

如果空间的一个基底中的三个基向量 _____, 且长度都为 _____, 那么这个基底叫作单位正交基底, 常用 _____ 表示. 把一个空间向量分解为三个 _____ 的向量, 叫作把空间向量进行正交分解.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1) 空间中的任何一个向量都可以用三个给定的向量表示. ()
- (2) 若 $\{a, b, c\}$ 为空间的一个基底, 则 a, b, c 全不是零向量. ()

- (3) 若 a, b 不共线, 向量 $c = \lambda a + \mu b$ ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ 且 $\lambda\mu \neq 0$), 则 a, b, c 可以构成空间的一个基底. ()
- (4) 任何三个不共线的向量都可构成空间的一个基底. ()

课中探究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 空间向量的基底

例 1 [2024·北京理工附中测试] 已知 a, b, c 是不共面的三个向量, 则能构成空间的一个基底的一组向量是 ()

- A. $a, 2b, b-c$
- B. $2b, b-2a, b+2a$
- C. $3a, a-b, a+2b$
- D. $c, a+c, a-c$

变式 已知 M, A, B, C 为空间的四个点, 且任意三点不共线, O 为空间中一点, 下列可能使 $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ 构成空间的一个基底的关系式是 ()

- A. $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$
- B. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$
- C. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$
- D. $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$

【素养小结】

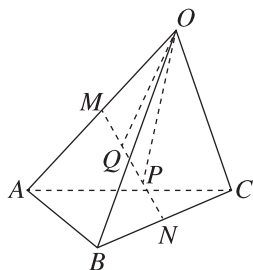
基底的判断思路: 判断给出的三个向量能否构成基底, 关键是判断这三个向量是否共面. 首先应考虑三个向量中是否有零向量, 其次判断三个非零向量是否共面. 如果从正面难以入手判断, 那么可假设三个向量共面, 利用向量共面的充要条件建立方程, 若方程的解唯一, 则三个向量共面; 否则, 三个向量不共面.

◆ 探究点二 用基底表示空间向量

例 2 如图所示,在三棱锥 $O-ABC$ 中, M,N 分别是 OA,BC 的中点, P,Q 是 MN 的两个三等分点(点 P 靠近点 N ,点 Q 靠近点 M).

(1)用基底 $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$ 表示向量 $\overrightarrow{OP}$;

(2)若 $\overrightarrow{OQ} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$,求实数 x, y, z 的值.



[素养小结]

用基底表示向量的步骤:

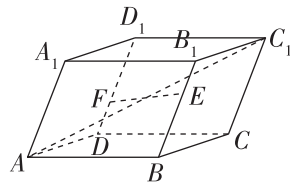
(1)定基底:根据已知条件,确定三个不共面的向量构成空间的一个基底.

(2)找目标:用确定的基底(或已知基底)表示目标向量,需要根据三角形法则及平行四边形法则,结合相等向量的代换、向量的运算进行变形、化简,最后求出结果.

(3)下结论:利用空间的一个基底 $\{a, b, c\}$ 可以表示出空间所有向量.表示要彻底,结果中只能含有 a, b, c ,不能含有其他形式的向量.

◆ 探究点三 空间向量基本定理的应用

例 3 如图,平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的所有棱长均为 2, AB, AD, AA_1 两两夹角均为 $\frac{\pi}{3}$,点 E, F 分别在棱 BB_1, DD_1 上,且 $BE = 2B_1E, D_1F = 2DF$,求直线 AC_1 与 EF 所成角的余弦值.



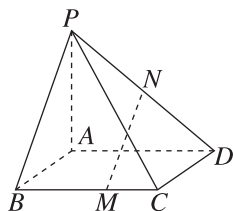
变式 如图所示,已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为平行四边形, M, N 分别为棱 BC, PD 上的点,且 $CM = \frac{1}{2}BM, N$ 是 PD 的中点,若向量 $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD} + y\overrightarrow{AP}$,则 ()

A. $x = \frac{1}{3}, y = -\frac{1}{2}$

B. $x = -\frac{1}{6}, y = \frac{1}{2}$

C. $x = -\frac{1}{3}, y = \frac{1}{2}$

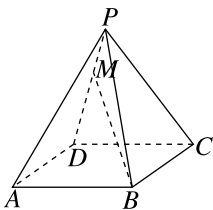
D. $x = \frac{1}{6}, y = -\frac{1}{2}$



变式 如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形,侧棱 AP 的长为 2,且 $\overrightarrow{AP}$ 与 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ 的夹角都为 60° , M 在棱 PD 上, $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PD}$, 设 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}, \overrightarrow{AD} = \mathbf{b}, \overrightarrow{AP} = \mathbf{c}$.

(1) 试用 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 表示向量 $\overrightarrow{BM}$;

(2) 求 $\overrightarrow{BM}$ 与 $\overrightarrow{AP}$ 的夹角.



2. [2025 · 北京首师大附中测试] 下列可使非零向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 构成空间的一个基底的条件是 ()

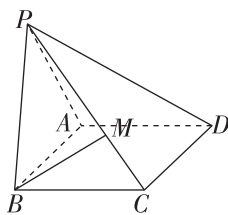
A. $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 两两垂直

B. $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{c}$

C. $\mathbf{a} = m\mathbf{b} + n\mathbf{c}$

D. $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$

3. [2025 · 北京北师大附属实验学校测试] 如图,已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是平行四边形, M 为侧棱 PC 上的点,且 $\overrightarrow{PM} = 2\overrightarrow{MC}$, 若 $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD} + z\overrightarrow{AP}$, 则 $x + y + z =$ ()



A. $-\frac{5}{3}$

B. $-\frac{2}{3}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{5}{3}$

4. 平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,以顶点 A 为端点的三条棱的长度都为 2,且两两夹角为 60° , 则 DB_1 和 C_1A_1 所成角的余弦值为 _____.

5. 已知 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 是空间的一个基底,且 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \overrightarrow{OB} = -3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \overrightarrow{OC} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, 试判断 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 能否构成空间的一个基底.

[素养小结]

用空间向量基本定理解决立体几何问题的步骤:首先根据已知条件,确定三个不共面的向量构成空间的一个基底,如果存在三个两两垂直的空间向量,那么可以确定一个单位正交基底;然后根据三角形法则及平行四边形法则,结合相等向量的代换、向量的运算用确定的基底(或已知基底)表示目标向量;最后把空间向量的运算转化为基向量的运算.涉及异面直线所成的角

时,可用已知向量代入公式 $\cos \theta = \left| \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} \right|$ 求解,其中 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 用基向量表示.

课堂评价

知识评价 素养形成

1. 若 $p: \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 是三个非零向量, $q: \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 为空间的一个基底,则 p 是 q 的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

1.3 空间向量及其运算的坐标表示

1.3.1 空间直角坐标系

1.3.2 空间向量运算的坐标表示

【学习目标】

1. 在空间向量基本定理的基础上,了解空间直角坐标系.
2. 结合简单几何体,能写出有关点和向量的坐标.
3. 类比平面向量,掌握空间向量的线性运算及其坐标表示.
4. 基于运算,能探究空间向量模的坐标公式、空间两点间的距离公式.
5. 类比平面向量,知道空间向量平行、垂直、夹角的坐标表示.

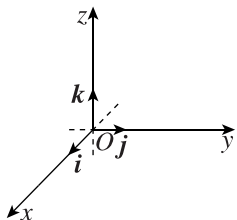
课前预习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系

定义:如图,在空间选定一点 O 和一个单位正交基底 $\{i, j, k\}$. 以点 O 为原点,分别以 i, j, k 的方向为正方向、以它们的长为单位长度建立三条数轴: x 轴、 y 轴、 z 轴,它们都叫作 _____. 这时我们就建立了一个空间直角坐标系 $Oxyz$, O 叫作 _____, i, j, k 都叫作 _____, 通过每两条坐标轴的平面叫作 _____, 分别称为 Oxy 平面, Oyz 平面, Ozx 平面.



2. 空间直角坐标系的画法

(1)空间直角坐标系的画法:画空间直角坐标系 $Oxyz$ 时,一般使 $\angle xOy =$ _____, $\angle yOz =$ _____.

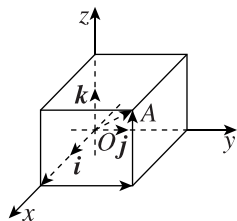
(2)右手直角坐标系:在空间直角坐标系中,让右手拇指指向 x 轴的正方向,食指指向 y 轴的正方向,如果中指指向 _____,则称这个坐标系为右手直角坐标系.

◆ 知识点二 空间向量的坐标

1. 空间中点的坐标

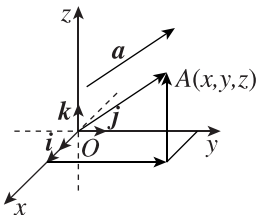
如图,由空间向量基本定理,存在唯一的有序实数组 (x, y, z) , 使 $\overrightarrow{OA} =$ _____. 在单位正交基底 $\{i, j, k\}$ 下与向量 $\overrightarrow{OA}$ 对应的有序实数组 $(x,$

$y, z)$, 叫作点 A 在空间直角坐标系中的坐标,记作 _____, 其中 x 叫作点 A 的横坐标, y 叫作点 A 的纵坐标, z 叫作点 A 的竖坐标.



2. 空间中向量的坐标

如图,在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中,给定向量 a , 作 $\overrightarrow{OA} = a$. 由空间向量基本定理,存在唯一的有序实数组 (x, y, z) , 使 $a = xi + yj + zk$. 有序实数组 _____ 叫作 a 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标,可简记作 _____.



【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1) (x, y, z) 既可以表示向量,也可以表示点.

()

(2) 点 $(2, 0, 3)$ 在空间直角坐标系中的 y 轴上.

()

(3) 点 $(0, 0, 3)$ 在空间直角坐标系中的 Oxy 平面上.

()

(4) 已知 i, j, k 分别是空间直角坐标系 $Oxyz$ 中 x 轴、 y 轴、 z 轴的正方向上的单位向量,且 $\overrightarrow{AB} = -i + j - k$, 则点 B 的坐标一定是 $(-1, 1, -1)$.

()

◆ 知识点三 空间向量运算的坐标表示

若 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 则

加法	$\mathbf{a} + \mathbf{b} =$ _____
减法	$\mathbf{a} - \mathbf{b} =$ _____
数乘	$\lambda \mathbf{a} =$ _____, $\lambda \in \mathbf{R}$
数量积	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =$ _____

【诊断分析】 判断正误. (请在括号中打“√”或“×”)

(1) 已知向量 $\mathbf{a} = (1, -1, -2), \mathbf{b} = (-4, 2, 0)$, 则 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (-3, 1, -2)$. ()

(2) 已知向量 $\mathbf{a} = (3, 5, 1), \mathbf{b} = (2, 2, 3), \mathbf{c} = (4, -1, -3)$, 则向量 $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + 4\mathbf{c}$ 的坐标为 $(16, 0, -19)$. ()

◆ 知识点四 空间向量运算的坐标表示的应用

若 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}, \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 则

共线	$\mathbf{a} // \mathbf{b} \Leftrightarrow$ _____ $\Leftrightarrow$ _____ ($\lambda \in \mathbf{R}$)
垂直	$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow$ _____ $\Leftrightarrow$ _____
向量长度	$ \mathbf{a} =$ _____ $=$ _____
向量夹角公式	$\cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle =$ _____ $=$ _____
空间两点间的距离公式	设 $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ 是空间中任意两点, O 为原点, 则 $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} =$ _____, $P_1P_2 =$ _____ _____ $=$ _____ _____

【诊断分析】 判断正误. (请在括号中打“√”或“×”)

(1) 在空间直角坐标系中, 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标与终点 B 的坐标相同. ()

(2) 设 $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$ 且 $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, 若 $\mathbf{a} // \mathbf{b}$, 则 $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$. ()

(3) 若四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 则 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{DC}$ 的坐标相同. ()

(4) 已知非零向量 $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$, 若 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 则 $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$. ()

课中探究

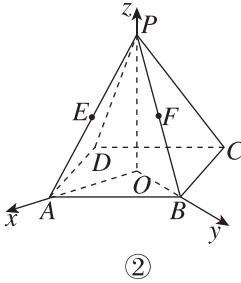
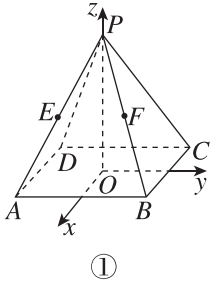
考点探究 素养小结

◆ 探究点一 求空间点的坐标

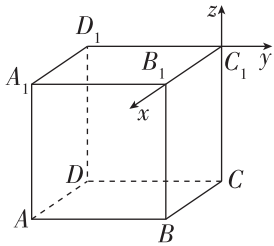
例 1 已知在正四棱锥 $P-ABCD$ 中, O 为底面的中心, 底面边长和高都是 2, E, F 分别是侧棱 PA, PB 的中点.

(1) 如图①, 以 O 为坐标原点, 分别以 $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{OP}$ 的方向为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正方向, 建立空间直角坐标系, 写出点 A, B, C, D, P, E, F 的坐标;

(2) 如图②, 以 O 为坐标原点, 分别以 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OP}$ 的方向为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正方向, 建立空间直角坐标系, 写出点 A, B, C, D, P, E, F 的坐标.



变式 (1) [2025·北京东直门中学测试] 在如图所示的空间直角坐标系中, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 则点 A 的坐标是 ()



- A. $(-1, -1, -1)$ B. $(-1, 1, -1)$
C. $(1, -1, 1)$ D. $(1, -1, -1)$

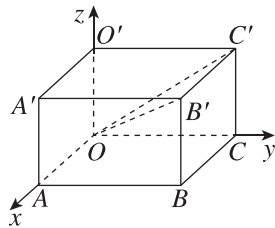
(2) [2025·通州期中] 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中, 点 $A(1, 2, 4)$ 关于 Oyz 平面对称的点的坐标为 _____.

[素养小结]

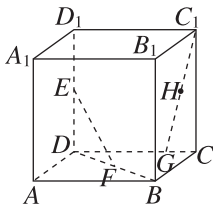
- (1) 建立空间直角坐标系时应遵循的两个原则: ① 让尽可能多的点落在坐标轴上或坐标平面内; ② 充分利用几何图形的对称性.
(2) 求某点 M 的坐标的方法: 作 MM' 垂直于平面 Oxy , 垂足为 M' , 求 M' 的横坐标 x , 纵坐标 y , 即点 M 的横坐标 x , 纵坐标 y , 再求点 M 在 z 轴上射影的竖坐标 z , 即为点 M 的竖坐标 z , 于是得到点 M 的坐标 (x, y, z) .

◆ 探究点二 空间向量的坐标

例 2 如图, 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中有一长方体 $OABC-O'A'B'C'$, 且 $OA=6, OC=8, OO'=5$.
(1) 写出点 B' 的坐标, 并将 $\overrightarrow{OB'}$ 用单位正交基底 $\{i, j, k\}$ 表示;
(2) 求 $\overrightarrow{OC'}$ 的坐标.

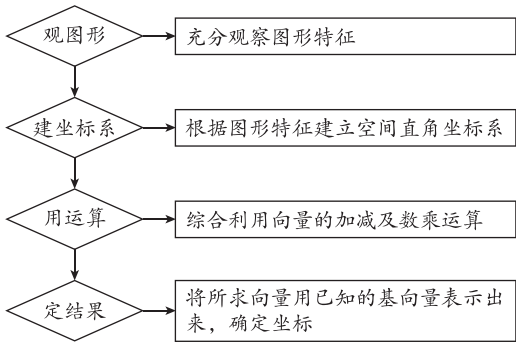


变式 如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别是 D_1D, BD 的中点, G 在棱 CD 上, 且 $CG = \frac{1}{4}CD$, H 为 C_1G 的中点. 建立适当的空间直角坐标系, 写出 $\overrightarrow{EF}$ 和 $\overrightarrow{GH}$ 的坐标.



[素养小结]

用坐标表示空间向量的步骤:



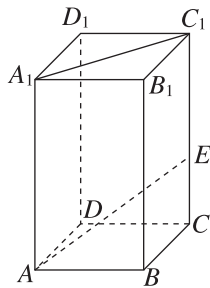
◆ 探究点三 空间向量的坐标运算

例 3 已知 $a = (2, -1, -2)$, $b = (0, -1, 4)$, 求 $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $2a \cdot (-b)$, $(a + b) \cdot (a - b)$.

变式 (1) 设 $x, y \in \mathbf{R}$, 向量 $a = (x, 1, 0)$, $b = (2, y, 2)$, $c = (1, -2, 1)$, 且 $a \perp b$, $b \parallel c$, 则 $|a + b| =$ ()

- A. $\sqrt{14}$ B. $\sqrt{10}$
C. $\sqrt{29}$ D. $2\sqrt{7}$

(2) 如图, 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = BC$, E 是侧棱 CC_1 上的任意一点, 在线段 A_1C_1 上是否存在一个定点 P , 使得 D_1P 总垂直于 AE ? 请说明理由.



变式 [2026 · 北京北师大附属实验学校测试] 已知空间向量 $a = (1, 0, 2)$, $b = (-2, 1, 3)$, 则 $a - 2b =$ _____, $a \cdot b =$ _____.

◆ 探究点四 空间向量平行、垂直的坐标表示及应用

例 4 已知空间三点 $A(-2, 0, 2)$, $B(-1, 1, 2)$, $C(-3, 0, 4)$. 设 $a = \overrightarrow{AB}$, $b = \overrightarrow{AC}$.

- (1) 若 $|c| = 3$, $c \parallel \overrightarrow{BC}$, 求 c ;
(2) 若 $ka + b$ 与 $ka - 2b$ 互相垂直, 求 k .

[素养小结]

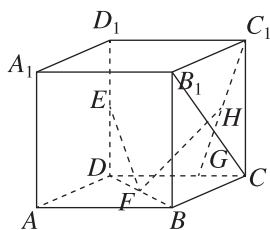
利用空间向量证明垂直、平行的一般步骤:

- (1) 建立空间直角坐标系, 建系时要尽可能地利用条件中的垂直关系.
- (2) 建立空间图形与空间向量之间的关系, 用空间向量表示出问题中所涉及的点、直线、平面的要素.
- (3) 通过空间向量的运算求出直线的方向向量, 再研究平行、垂直关系.
- (4) 根据运算结果解释相关问题.

◆ 探究点五 利用空间向量的坐标运算求夹角及长度

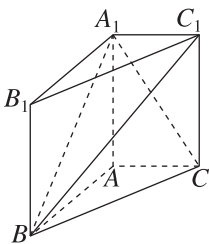
例 5 如图,在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别是 DD_1, DB 的中点, G 在棱 CD 上,且 $CG = \frac{1}{3}CD$, H 是 C_1G 的中点.建立适当的空间直角坐标系,解决下列问题.

- (1) 求证: $EF \perp B_1C$;
- (2) 求 $\cos \langle \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{C_1G} \rangle$;
- (3) 求 FH 的长.



变式 如图,在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB \perp AC$, $AB = 2\sqrt{3}$, $AC = 2$, $AA_1 = 3$.

- (1) 求 $\cos \langle \overrightarrow{BC_1}, \overrightarrow{A_1C} \rangle$;
- (2) 设 $3\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{BC}$, 求 $|\overrightarrow{AG}|$.

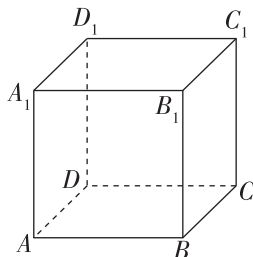


[素养小结]

利用空间向量的坐标运算求夹角与距离的一般步骤:

- (1) 建系: 根据题目中的几何图形建立恰当的空间直角坐标系.
- (2) 求坐标: ① 求出相关点的坐标; ② 写出向量的坐标.
- (3) 论证、计算: 结合公式进行论证、计算.
- (4) 转化: 转化为夹角与距离问题.

拓展 [2024 · 北京八一学校测试] 如图,正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 动点 M 在棱 CC_1 上, 动点 P 在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 上, 且 $AP \perp$ 平面 MBD_1 , 则线段 AP 长度的取值范围是 ()



- A. $[1, \sqrt{2}]$
- B. $[\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{3}]$
- C. $[\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{2}]$
- D. $[\frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty)$

课堂评价

知识评价 素养形成

1. [2025 · 丰台期中] 在棱长为 4 的正方体内有一点 P , 它到该正方体共顶点的三个面的距离分别为 2, 1, 1, 记正方体的中心为点 O , 则 $OP =$ ()
 - A. $\sqrt{10}$
 - B. $\sqrt{6}$
 - C. 2
 - D. $\sqrt{2}$
2. [2026 · 房山期中] 已知向量 $m = (4, -3, 2)$, $n = (1, x, 4)$, 若 $m \perp n$, 则 x 的值是 ()
 - A. -4
 - B. -1
 - C. 1
 - D. 4
3. [2026 · 延庆期中] 已知 $a = (\sqrt{3}, 1, 0)$, $b = (-2, 0, 0)$, 则 $\langle a, b \rangle =$ ()
 - A. 30°
 - B. 60°
 - C. 150°
 - D. 120°
4. [2026 · 北京八一学校测试] 已知 $a = (2, -1, 3)$, $b = (-4, 2, x)$, 且 $a \parallel b$, 则 $x =$ _____.
5. [2026 · 北京育才学校测试] 设 $a = (3, 5, -4)$, $b = (2, -1, -2)$, 则 $|a - 2b| =$ _____.